Exercice 1

1. Dans ce type de formes indéterminées, les termes prépondérants sont les termes de plus hauut degré.
$\dfrac{x-1}{x^3-x^2-x+1} = \dfrac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x^3\left(1-\frac{x^2}{x^3}-\frac{x}{x^3}-\frac{1}{x^3}\right)} = \dfrac{\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}$.
Par quotient de limites, on conclut donc que la limite cherchée vaut 0 (en fait, tout se passe comme si on avait $\dfrac{x}{x^3}$ dans cette situation).
2. Attention, la situation est totalement différente ici car x tend vers 1. Cet exemple et le suivant se traitent de la même manière, par des méthodes de factorisation de polynômes.
Par division euclidienne ou bien par identification (1 est racine évidente, d'où la forme indéterminée du type « $\dfrac{0}{0}$ »), $X^3-X^2-X+1=(X-1)^2(X+1)$.
D'où, pour x tel que la fraction soit définie, on obtient :
$\dfrac{x-1}{x^3-x^2-x+1} = \dfrac{x-1}{(x-1)^2(x+1)} = \dfrac{1}{(x-1)(x+1)}$.
On a $\lim\limits_{x\to 1^-}(x-1)(x+1)$ avec $(x-1)(x+1)<0$ lorsque $x\to 1^-$.
Donc la limite cherchée vaut $-\infty$.
3. $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{x^3-x^2-x+1}=+\infty$ par le même raisonnement, seul le signe du dénominateur change.
4. C'est comme pour la première question.
On obtient, après simplification : $\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-x} = \dfrac{x\left(1-\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x}}-1}$ donc la limite cherchée est $-\infty$ par quotient de limites.
5. $\ln(x+3)-\ln(x-1) = \ln\left(x\left(1+\frac{3}{x}\right)\right)-\ln\left(x\left(1-\frac{1}{x}\right)\right) = \ln(x)+\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)-\ln(x)-\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) = \ln\left(1+\frac{3}{x}\right)-\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)$, quantité qui tend vers 0 par composition de limites (chacune des quantités dans les logarithmes tendent vers 1).
On peut également faire tout à l'envers, en écrivant que cette quantité vaut : $\ln\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)$, puis factoriser la fraction par le terme de plus haut degré en haut et en bas et conclure ensuite par composition de limites. Comme on préfère...

Exercice 2

1. Comme pour $x>0$, on a $\lfloor\frac{1}{x}\rfloor > \dfrac{1}{x}-1$ et que $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}-1=+\infty$ alors, par comparaison de limite, $\lim\limits_{x\to 0^+}\lfloor\frac{1}{x}\rfloor=+\infty$.
Comme pour $x<0$, on a $\lfloor\frac{1}{x}\rfloor \leqslant \dfrac{1}{x}$ et que $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$ alors, par comparaison de limite, $\lim\limits_{x\to 0^-}\lfloor\frac{1}{x}\rfloor=-\infty$.
Remarquez le bon choix des sens d'inégalités pour appliquer les théorèmes de comparaisons de limites.
2. Comme pour $x>0$, on a $x\left(\dfrac{1}{x}-1\right) < x\lfloor\frac{1}{x}\rfloor \leqslant x\dfrac{1}{x} \iff 1-x < x\lfloor\frac{1}{x}\rfloor \leqslant 1$ alors, par comparaison de limite, $\lim\limits_{x\to 0^+} x\lfloor\frac{1}{x}\rfloor = 1$.
pour la limite en 0^-, c'est le même principe mais faites attention au sens d'inégalités en multipliant par $x<0$.
3. Pour tout réel x tel que $0<x<1$, on a $\dfrac{\lfloor x\rfloor}{x}=\dfrac{0}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\lfloor x\rfloor}{x}=0$.
En revanche, pour tout réel x tel que $-1<x<0$, on a $\dfrac{\lfloor x\rfloor}{x}=\dfrac{-1}{x}$ donc $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\lfloor x\rfloor}{x}=+\infty$.
Il n'y a donc pas de limite en 0.
4. Pour $x>0$, les mêmes encadrements qu'à la question 2 montrent que $\sqrt{x}\lfloor\frac{1}{x}\rfloor > \sqrt{x}\left(\dfrac{1}{x}-1\right)$.

Exercice 3

1. Pour montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $1 + x \leqslant e^x$, on peut soit étudier le signe de la différence $f(x) = e^x - (1 + x)$ par étude de fonctrion classique (variations puis déduction du signe), soit utiliser le fait que la fonction exponentielle étant convexe, elle est toujours au dessus de ses tangentes, notamment la tangente au point d'abscisse 0, d'équation $y = x + 1$. Dans tous les cas, cette inégalité est un grand classique, souvent utile et à redémontrer dans les exercices.
   Pour établir l'autre inégalité, on peut aussi étudier la fonction différence $g(x) = 1 + xe^x - e^x$ ou bien remarquer que comme $e^x > 0$ alors, en divisant les deux membres par e^x, on a : $e^x \leqslant 1 + xe^x \iff 1 \leqslant e^{-x} + x \iff 1 - x \leqslant e^{-x}$. Cette dernière inégalité est vraie, en remplaçant x par $-x$ dans l'inégalité précédente, qui était valable sur $\mathbb{R}$.
2. Les deux résultats précédents conduisent à $1 \leqslant \dfrac{e^x - 1}{x} \leqslant e^x$ sur $\mathbb{R}_+$ et $1 \geqslant \dfrac{e^x - 1}{x} \geqslant e^x$ sur $\mathbb{R}_-$ (attention à bien changer le sens des inégalités lorsque x est négatif). On a donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ d'après le théorème des gendarmes (car $\lim\limits_{x \to 0} e^x = 1$).
   A première vue, cet exercice passe pour une démonstration de la limite du taux d'accroissement de la fonction exponentielle en 0, donc de sa dérivabilité en 0. Il n'en est rien, car pour cela, on calcule la dérivée de cette fonction (quelle que soit la méthode, même celle avec la convexité, réfléchissez à quel endroit on s'en sert) ce qui implique d'avoir supposé qu'on pouvait le faire...

Exercice 4

On pose $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$.

1. On trouve $\mathcal{D}_f = [-1; +\infty[- \{0\}$.
2. f est continue sur chaque intervalle de son ensemble de définition par les théorèmes généraux donc la question du prolongement par continuité se pose en $x = 0$. Pour cela, on choisit $x \in \mathcal{D}_f$ et on remarque que $f(x) = \dfrac{\left(\sqrt{1+x} - 1\right)\left(\sqrt{1+x} + 1\right)}{x\left(\sqrt{1+x} + 1\right)} = \dfrac{1 + x - 1}{x\left(\sqrt{1+x} + 1\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x} + 1}$.
   On en déduit que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{1}{2}$ donc f peut être prolongée par continuité en posant $f(0) = \dfrac{1}{2}$ et on obtient ainsi une fonction définie et continue sur $[-1; +\infty[$.

Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P(X) = a_{2n+1}X^{2n+1} + a_{2n}X^{2n} + \cdots + a_1X + a_0$ un polynôme de degré impair ($a_{2n+1} \neq 0$). On a $P(x) = 0 \iff -P(x) = 0$ donc , quitte à remplacer le polynôme P par $-P$, on peut supposer que $a_{2n+1} > 0$.

On factorise par le terme de plus haut degré et on obtient, après simplification :

$P(x) = a_{2n+1}x^{2n+1}\left(1 + \dfrac{a_{2n}}{x} + \cdots + \dfrac{a_1}{x^{2n}} + \dfrac{a_0}{x^{2n+1}}\right)$. Sous cette forme, on obtient bien, par produit de limites $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = +\infty > 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = -\infty < 0$ ($2n + 1$ est impair).

Comme P est continue sur $\mathbb{R}$, car c'est un polynôme, P admet au moins une racine d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 6

Soit $f : [0; 1] \mapsto [0; 1]$ une fonction continue. On applique le TVI à la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - x$, qui est continue sur $[0; 1]$ car f l'est. De plus,

$g(0) = f(0) - 0 = f(0) \geqslant 0$ car $f(0) \in [0; 1]$ et $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$ car $f(1) \in [0; 1]$. Donc, en appliquant le TVI, l'équation $g(x) = 0$ possède au moins une solution donc l'équation $f(x) = x$ possède au moins une solution.

Remarque : cet exercice se généralise sans problème à tout intervalle stable par f, ce qui implique que f possède au moins un point fixe.

Exercice 8

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire. On considère $g(x) = 2\mathrm{e}^x - x - 2$

1. - Par somme, on a $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty}$.
   - $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $g(x) = \mathrm{e}^x(2 - \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} - \dfrac{2}{\mathrm{e}^x})$.

     $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$ par croissances comparées et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{\mathrm{e}^x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (2 - \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} - \dfrac{2}{\mathrm{e}^x}) = 2$

     Et par produit, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty}$.

2. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 2\mathrm{e}^x - 1$. Or $2\mathrm{e}^x - 1 \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^x \geqslant \dfrac{1}{2} \iff x \geqslant \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\ln(2)$ par stricte croissance de ln.
3. D'où le tableau de variations de g, avec $g(-\ln(2)) = \ln(2) - 1$ et $\ln(2) - 1 < 0$ en effet $2 < \mathrm{e}$

x	$-\infty$		$-\ln(2)$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\ln(2)-1$	$\nearrow$	$+\infty$

4. - Sur l'intervalle $]-\infty; -\ln(2)[$, g est strictement décroissante et continue (somme de fonctions continues).
     Donc, d'après le théorème de la bijection, g est bijective de $]-\infty; -\ln(2)[$ sur $J = g\left(]-\infty; -\ln(2)[\right) =]\ln(2) - 1; +\infty[$.
     De plus $0 \in]\ln(2) - 1; +\infty[$ donc il existe un unique $\alpha \in]-\infty; -\ln(2)[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
   - De même on montre que g est bijective de $]\ln(2); +\infty[$ sur $[\ln(2) - 1; +\infty[$ et pour les mêmes raisons, il existe un unique $\beta \in]\ln(2); +\infty[$ telle que $g(\beta) = 0$

   Ainsi on a montré qu' $\boxed{\text{il existe exactement deux solutions, } \alpha \text{ et } \beta, \text{ de l'équation } g(x) = 0 \text{ avec } \alpha < -\ln(2) < \beta}$.

5. $g(-2) = 2\mathrm{e}^{-2} > 0$ et $g(-1) = 2\mathrm{e}^{-1} - 1 < 0$ (en effet, $\mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}} < \dfrac{1}{2}$).

   Donc $g(-2) > g(\alpha) > g(-1) \Rightarrow \boxed{-2 < \alpha < -1}$ car g est strictement décroissante sur $[-2; -1]$ De plus, on vérifie que $g(0) = 0$ et $0 \in]\ln(2) - 1; +\infty[$ donc, par unicité de la solution sur cet intervalle, on a $\boxed{\beta = 0}$.

6.

x	$-\infty$		α		$-\ln(2)$		0		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\ln(2)-1$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$g(x)$		$+$	0		$-$		0	$+$	

Partie B : Étude d'une fonction principale.

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x$.

   $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = \lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{2x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x = 0$ par croissances comparées, donc $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0}$

   Donc, $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ admet une asymptote horizontale d'équation } y = 0 \text{ en } +\infty}$.

2. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{e}^{2x}\left(1 - \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\right)$.

   $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{2x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$ par croissances comparées, donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} (1 - \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}) = 1$

   et par produit, on obtient $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

3. f est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme somme de fonctions dérivables et, pour $x \in \mathbb{R}$

   $f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x - (x+1)\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(2\mathrm{e}^x - 1 - x - 1) = \mathrm{e}^x(2\mathrm{e}^x - x - 2)$ $\boxed{= \mathrm{e}^x g(x)}$.

   On a étudié le signe de g sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^x > 0$, f' est donc du signe de g d'où le tableau de variations de f, avec $f(0) = 1 - 0 - 1 = 0$

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4. D'après la question 4 de la partie A, on a montré que $g(\alpha) = 0 \iff 2\mathrm{e}^\alpha - \alpha - 2 = 0 \iff \mathrm{e}^\alpha = \dfrac{\alpha+2}{2}$. ainsi,

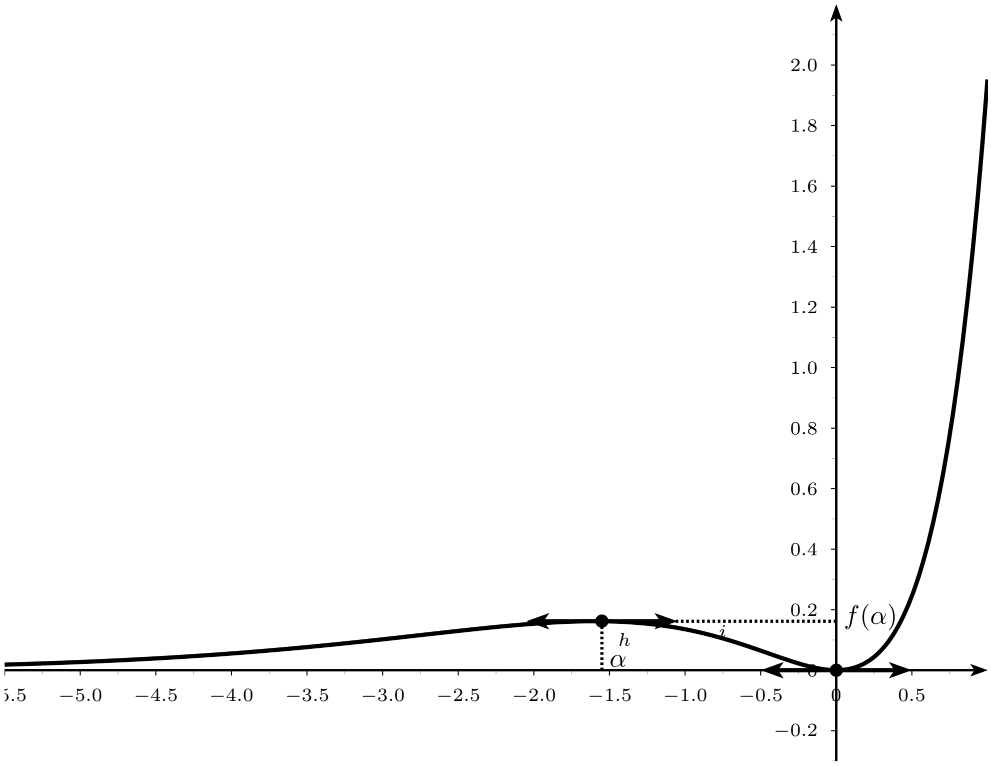
$$f(\alpha) = \left(\frac{\alpha+2}{2}\right)^2 - (\alpha+1)\frac{\alpha+2}{2} = \frac{\alpha+2}{2}\left(\frac{\alpha+2}{2} - (\alpha+1)\right) = \frac{\alpha+2}{2}\left(\frac{\alpha+2-2\alpha-2}{2}\right)$$

$$\iff f(\alpha) = \frac{\alpha+2}{2} \times (-\frac{\alpha}{2}) = \boxed{-\frac{\alpha^2+2\alpha}{4}}$$

   On sait déjà que $f(\alpha) > 0$ d'après le tableau de variations de f.
   Pour l'autre inégalité, on peut étudier la fonction $h : x \mapsto x^2 + 2x$ sur $[-2, 1]$ (car $\alpha \in]-2, 1[$. On démontre facilement que son minimum est -1, atteint pour $x = -1$.
   Donc, on en déduit que $\alpha^2 + 2\alpha > -1 \Rightarrow -\dfrac{1}{4}\left(\alpha^2 + 2\alpha\right) < -\dfrac{1}{4}(-1) = \dfrac{1}{4} \iff f(\alpha) < \dfrac{1}{4}$. Ainsi,

   $\boxed{0 < f(\alpha) < \dfrac{1}{4}}$

5. En prenant $\alpha = -1,5$ et $f(\alpha) = 0.25$ (les limieux des deux encadrements, choix arbitraire...) avec $f(1) = \mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e} = \mathrm{e}(\mathrm{e} - 2) \approx 2,7 \times 0,7 \approx 2$ et $f(-5)$ très proche de 0 (à cause de la limite en $-\infty$), on a quelque chose de ce genre là :



Exercice 11

Soit $f : x \mapsto x + \ln x$

1. f est continue, strictement croissante (dérivée facile) et réalise, d'après le théorème de la bijection, une bijection de l'intervalle $]0; +\infty[$ vers $]-\infty; +\infty[$ (limites faciles).
2. L'équation $f(x) = n$ admet pour tout $n \in \mathbb{N}$ une unique solution sur $\mathbb{R}$, que l'on note x_n, d'après la question précédente (tout réel possède un unique antécédent par f).
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(x_n) = n \iff x_n = g(n)$. Or g est strictement croissante car f l'est donc $x_{n+1} = g(n+1) > g(n) = x_n$, autrement dit, la suite (x_n) est strictement croissante.
4. Supposons que la suite (x_n) est majorée. D'après le théorème de convergence monotone, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell \in \mathbb{R}$. Or, comme g réalise une bijection de l'intervalle $]-\infty; +\infty[$ vers $]0; +\infty[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} g(n) = +\infty$. Comme $x_n = g(n)$, on aboutit à une contradiction en passant à la limite dans l'égalité ($\ell = +\infty$). Ceci signifie que la suite n'est pas majorée et donc, comme elle est croissante, qu'elle diverge vers $+\infty$.

Exercice 12

Pour $n \in \mathbb{N}$, on introduit la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = x^n - nx + 1$.

1. La solution est faite au tableau en classe.
2. Montrons que (a_n) est décroissante. Pour tout tout entier$n \geqslant 3$, f_n est décroissante. Donc $a_n \geqslant a_{n+1} \Leftrightarrow f_n(a_n) \leqslant f_n(a_{n+1}) \Leftrightarrow f_n(a_n) \leqslant f_n(a_{n+1}) \Leftrightarrow 0 \leqslant f_n(a_{n+1})$.
   Comme $f_{n+1}(a_{n+1}) = 0$ on a $a_{n+1}^{n+1} = (n+1)a_{n+1} - 1$.
   Donc $f_n(a_{n+1}) = a_{n+1}^n - na_{n+1} + 1 = a_{n+1}^n - ((n+1)a_{n+1} - 1) + a_{n+1} = a_{n+1}^n - a_{n+1}^{n+1} + a_{n+1}$. Comme $0 < a_{n+1} < 1$, on a $a_{n+1}^n - a_{n+1}^{n+1} = a_{n+1}^n(1 - a_{n+1}) > 0$ et par conséquent $a_{n+1}^n - a_{n+1}^{n+1} + a_{n+1} \geqslant 0$, soit $f_n(a_{n+1}) \geqslant 0$. Donc (a_n) est décroissante. De plus (a_n) est minorée par 0, donc elle converge.
3. On a pour tout entier $n \geqslant 3$, $f_n(\dfrac{2}{n}) = 2 - n < 0$ et $f_n(0) = 1 > 0$ et f_n continue, donc d'après le TVI, f_n s'annule sur $[0\,; \dfrac{2}{n}]$ ($\subset]0\,;1[$), en vertu de l'unicité de a_n on a $0 < a_n < \dfrac{2}{n}$.
   (a_n) converge vers 0 d'après le théorème d'encadrement.

4. On admet que pour $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $(1+t)^n \geqslant 1 + nt + \dfrac{n(n-1)}{2}t^2$.

   Démontrons que, pour tout $n \geqslant 3$, on a $1 + \dfrac{2}{\sqrt{n}} < b_n$.

   On a $b_n < 1 + \dfrac{2}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow b_n - 1 < \dfrac{2}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow (b_n - 1)^2 < \dfrac{4}{n}$ car $b_n - 1 > 0$ et la fonction carrée est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

   On pose $t = b_n - 1$ et en utilisant l'indication ci-dessus on a $1 + n(b_n - 1) + \dfrac{n(n-1)}{2}(b_n-1)^2 \leqslant b_n^n$. Or $b_n^n = nb_n - 1$, d'où $1 + n(b_n - 1) + \dfrac{n(n-1)}{2}(b_n-1)^2 \leqslant nb_n - 1$. Ce qui donne $\dfrac{n(n-1)}{2}(b_n-1)^2 \leqslant n - 2$, soit $(b_n - 1)^2 \leqslant (n-2)\dfrac{2}{n(n-1)}$ Comme $n - 2 < n - 1 < 2(n-1)$, on a $(n-2)\dfrac{2}{n(n-1)} \leqslant \dfrac{4}{n}$. Donc $(b_n - 1)^2 < \dfrac{4}{n}$. Finalement $b_n < 1 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}$.

   L'encadrement $1 < b_n < 1 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}$ implique que (b_n) converge vers 1 d'après le théorème de l'encadrement.

Exercice 17

1. Comme dans l'exercice 6, on pose $g(x) = f(x) - x$. et on applique le TVI.
2. Comme f est continue sur $[a\,;b]$ il existe $(x_1,\ x_2) \in [a\,;b]^2$ tel que $\forall x \in [a\,;b],\ f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$ d'après le théorème de Weierstrass.

   On pose $g(x) = f(x) - x$. Montrons que $g(x_1) \leqslant 0$ et $g(x_2) \geqslant 0$.

   1ère façon

   D'après l'énoncé $[a\,;b] \subset f([a\,;b])$, donc $f(x_1) \leqslant a \leqslant x_1$ et $x_2 \leqslant b \leqslant f(x_2)$ (car $f(x_1)$ est le minimum de f sur $[a\,;b]$ et $f(x_1)$ est le maximum de f sur $[a\,;b]$), donc $g(x_1) \leqslant 0$ et $g(x_2) \geqslant 0$.

   2ème façon

   D'après l'énoncé $[a\,;b] \subset f([a\,;b])$ et $f(x_1)$ est le minimum de f sur $[a\,;b]$ donc $f(x_1) \leqslant x_1$. De la même façon, comme $f(x_2)$ est le maximum de f sur $[a\,;b]$ on a $x_2 \leqslant f(x_2)$, donc $g(x_1) \leqslant 0$ et $g(x_2) \geqslant 0$.

   De plus g est continue, donc il résulte du TVI qu'il existe x_0 tel que $g(x_0) = 0$. On a alors $f(x_0) = x_0$.

Exercice 18

On pose $g(x) = f(x) - x$. Comme f est décroissante, on a pour tout $x \in [0\,;-\infty[,\ g(x) = f(x) - x \geqslant f(0) - x$. Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(0) - x) = -\infty$ on a, par comparaison , $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. De la même façon, comme f est décroissante, pour tout $x \in [0\,;-\infty[,\ g(x) = f(x) - x \leqslant f(0) - x$. et par comparaison on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$. De plus, g est continue, donc il existe d'après le TVI, un réel x_0 tel que $g(x_0) = 0$. Ainsi, x_0 est un point fixe de f.

Exercice 19

1. f est continue, donc $f(\mathbb{R})$ est un intervalle d'après le TVI ; de plus $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{Z}$. Donc $f(\mathbb{R})$ est un singleton, c'est à dire, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(\mathbb{R}) = \{c\}$. Donc f est une constante.
2. Soit h la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$. On a pour tout $x \in \mathbb{R},\ |h(x)| = 1,$ car $|f(x)| = |g(x)[$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R},\ h(x) = -1$ ou $h(x) = 1$. Donc h est à valeur dans $\mathbb{Z}$. De plus h est continue ; donc il résulte de 1) que h est une constante. Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = -1$ ou $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = 1$. Donc $f = g$ ou $f = -g$.