Correction du TD 9

Exercice 1

1. $\overline{A}$:"Au moins une des deux cartes n'est pas rouge."
   $A \cup C$:"Les deux cartes sont rouges ou sont des têtes".
   $A \cap B \cap \overline{C}$:"les deux cartes sont rouges, sont un valet et un dix et au moins une des deux cartes n'est pas une tête"="les deux cartes sont un valet rouge et un dix rouge".
2. $F = C \cap \bar{A}$ et $G = \overline{C}$
3. Si Ω est l'univers de l'expérience c'est à dire composé des 32 éventualités que sont les cartes. La loi de probabilité $\mathbb{P}$ est la loi uniforme.

   Pour réaliser A, Il y a deux cartes à choisir parmi 16 rouges donc $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\begin{pmatrix} 16 \\ 2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 32 \\ 2 \end{pmatrix}} = \dfrac{15}{62}$.

   Il y a 1 carte à choisir parmi 4 valets **et** une carte parmi 4 dix donc $\mathbb{P}(B) = \dfrac{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 32 \\ 2 \end{pmatrix}}$

   Il y a 2 cartes à choisir parmi les 12 têtes donc $\mathbb{P}(C) = \dfrac{\begin{pmatrix} 12 \\ 2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 32 \\ 2 \end{pmatrix}}$

   Il y a 1 carte à choisir parmi les têtes rouges **et** 1 carte à choisir parmi les têtes noires **ou** 2 cartes à choisir parmi les noires donc $\mathbb{P}(F) = \dfrac{\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 32 \\ 2 \end{pmatrix}}$

   $G = \bar{C}$ donc $\mathbb{P}(G) = 1 - \mathbb{P}(C)$

Exercice 2

On a la relation de récurrence, pour tout $j \in [[1, N-1]]$: $p_{j+1} = 2p_j$.

Ainsi on peut écrire $p_j = p_1 \times 2^{j-1}$.

Par définition $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} p_j = 1$, ainsi $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} 2^{j-1} p_1 = 1$ or

$$\sum_{j=1}^{N} 2^{j-1} = \sum_{j=0}^{N-1} 2^j = \frac{2^N - 1}{2 - 1}$$

Ce qui permet d'établir que $p_1 = \dfrac{1}{2^N - 1}$. En conclusion pour $j \in [[1; N]]$, $p_j = \dfrac{2^{j-1}}{2^N - 1}$.

Exercice 3

- ⋆ Il y a $\binom{24}{3}$ combinaisons de 3 pièces et $\binom{19}{3}$ combinaisons de trois pièces non défectueuses donc $p(A) = \dfrac{\binom{19}{3}}{\binom{24}{3}}$.
- ⋆ Il y a $\binom{5}{3}$ combinaisons de trois pièces non défectueuses donc $p(B) = \dfrac{\binom{5}{3}}{\binom{24}{3}}$.
- ⋆ Il y a $\binom{5}{1} \times \binom{19}{2}$ combinaisons d'une pièce défectueuse et de deux non défectueuses donc $p(C) = \dfrac{\binom{5}{1} \times \binom{19}{2}}{\binom{24}{3}}$.

- $\star$ $D = \bar{A}$ alors $p(D) = 1 - p(A) = 1 - \dfrac{\binom{19}{3}}{\binom{24}{3}}$

Exercice 4

1. Notons a la raison de la suite $(P(A_i))_{i\in[[1;n]]}$, ainsi
$$P(A_i) = \frac{1}{2n} + a(i-1).$$
Pour déterminer a on utilise le fait que $(A_i)_{i\in[[1;n]]}$ est un système complet d'événements.
$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2n} + a(i-1) = 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} + a\frac{n(n-1)}{2} = 1$$
On en déduit alors que $a = \dfrac{1}{n(n-1)}$.
2. La formule des probabilité totales donne
$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(B) \times P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2n}\left(\frac{1}{2n} + \frac{i-1}{n(n-1)}\right)$$
$$= \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{n(n-1)}\right)\sum_{i=1}^{n} i + \frac{1}{2n^2(n-1)}\sum_{i=1}^{n} i^2$$
$$= \frac{(n+1)(n-3)}{8n(n-1)} + \frac{(n+1)(2n+1)}{12n(n-1)} = \frac{7(n+1)}{24n}$$

Exercice 5

On a $P(A) = P(B) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$. On peut affirmer que les événements sont indépendants de part le contexte.
On peut traduire $C = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$. En effet la somme des résultats est impaire signifie que les deux nombres sont de parités différentes.
Comme $A \cap B$ et $\bar{A} \cap \bar{B}$ sont incompatibles
$$P(C) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B})$$
A et B étant indépendants,
$$P(C) = P(A)P(B) + P(\bar{A})P(\bar{B}) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$
$A \cap C = A \cap B$ et $P(A \cap B) = \dfrac{1}{4}$. Donc $P(A \cap C) = \dfrac{1}{4}$.
D'autre part $P(A) \times P(C) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$. A et C sont donc indépendants.
De la même façon on montre que $P(B \cap C) = P(B) \times P(C)$. D'où B et C sont indépendants.
En résumé A, B et C sont deux à deux indépendants.
Comme $A \cap B \cap C = A \cap B$ alors $P(A \cap B \cap C) = \dfrac{1}{4}$. Mais $P(A) \times P(B) \times P(C) = \dfrac{1}{8} \neq \dfrac{1}{4}$. Les événements A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants.

Exercice 6

1. On nomme D_1, D_2 et D_3 les 3 variables aléatoires donnant les résultats des trois dés. Le contexte permet de considérer que les variables D_1 D_2 et D_3 sont indépendantes.
$$P(S \leqslant i) = P(\max(D_1, D_2) \leqslant i) = P((D_1 \leqslant i) \cap (D_1 \leqslant i))$$

$$= P(D_1 \leqslant i) \times P(D_2 \leqslant i) = \frac{i}{6} \times \frac{i}{6} = \frac{i^2}{36}$$

De la même façon :

$$P(I \geqslant i) = P(\min(D_2, D_3) \geqslant i) = P((D_2 \geqslant i) \cap (D_3 \geqslant i))$$

$$= P(D_2 \geqslant i) \times P(D_3 \geqslant i) = \frac{6-(i-1)}{6} \times \frac{6-(i-1)}{6} = \frac{(7-i)^2}{36}$$

2. On peut traduire $(S \leqslant i) \cap (I \geqslant i) = (D_1 \leqslant i) \cap (D_2 = i) \cap (D_3 \geqslant i)$. Et l'indépendance des variables D_1, D_2 et D_3 donne

$$P((S \leqslant i) \cap (I_i \geqslant i)) = P(D_1 \leqslant i) \times P(D_2 = i) \times P(D_3 \geqslant i) = \frac{i}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{6-(i-1)}{6} = \frac{i(7-i)}{216}$$

En résumé les événements $(S \leqslant i)$ et $(I \geqslant i)$ sont indépendants lorsque

$$P((S \leqslant i) \cap (I \geqslant i)) = P(S \leqslant i) \times P(I \geqslant i) \Leftrightarrow \frac{i(7-i)}{216} \times \frac{i^2}{36} \times \frac{(7-i)^2}{36}$$

Comme $i \neq 0$ et $i \neq 7$
$(S \leqslant i)$ et $(I \geqslant i)$ sont indépendants lorsque $i(7-i) = 6$ ou encore lorsque $i = 1$ ou 6.

Exercice 7

1. $p_0 = 1$, car il commence avec 0 euros et il est certain d'être ruiné. $p_N = 0$ car le joueur B a zéro euro et la probabilité que le joueur A se ruine est nulle.
2. Pour k entier, on note R_k l'événement "le joueur est ruiné en partant avec k euros. On note A_1 l'événement "le joueur A gagne la partie 1". En prenant comme système complet d'événements $(A_1, \bar{A}_1)$, on a pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(R_k) = P(R_k \cap A_1) + P(R_k \cap \bar{A}_1) = P_{A_1}(R_k)P(A_1) + P_{\bar{A}_1}(R_k)P(\bar{A}_1).$$

Le joueur part avec k euros, sachant que le joueur A gagne la première partie, il va pouvoir partir avec ensuite avec $k+1$ euros, donc $P_{A_1}(R_k) = p_{k+1}$.
Le joueur part avec k euros, sachant que le joueur A perd la première partie, il va pouvoir partir ensuite avec $k-1$ euros, donc $P_{\bar{A}_1}(R_k) = p_{k-1}$. Donc $p_k = pp_{k+1} + qp_{k-1}$
3. On considère alors la suite $(p_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ définie par la relation de récurrence double

$$p_k = pp_{k+1} + qp_{k-1}$$

Son équation caractéristique d'inconnue r est $pr^2 - r + q = 0$.
Son discriminant est $\Delta = 1 - 4pq = 1 - 4p(1-p) = (2p-1)^2$.

   * Si $p = \frac{1}{2}$, $\Delta = 0$ et $r = \frac{1}{2p} = 1$.
   On en déduit que $\forall k \geqslant 1$, $p_k = \alpha + \beta k$ où α et β sont deux réels qu'on détermine avec les conditions $p_0 = 1$ et $p_N = 0$. Ce qui donne $\alpha = 1$ et $0 = \alpha + N\beta$. D'où

$$\forall k \geqslant 1 \quad p_k = \frac{N-k}{N}.$$

   * Si $p \neq \frac{1}{2}$, $\Delta > 0$ et $r_1 = \frac{1+2p-1}{2p} = 1$ et $r_2 = \frac{1-(2p-1)}{p} = \frac{1-p}{p}$.

   On en déduit que $\forall k \geqslant 1$, $p_k = \alpha + \beta \left(\frac{1-p}{p}\right)^k$ où α et β sont deux réels qu'on détermine avec les conditions $p_0 = 1$ et $p_N = 0$. Ce qui donne

$$\forall k \geqslant 1 \quad p_k = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^N - \left(\frac{q}{p}\right)^k}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1}.$$

Exercice 8

1. (a) Si on note N_1 et B_1 les événements "la première boule tirée est noire" et "la première boule tirée est blanche". Ils forment à eux deux un système complet d'événements. On en déduit que :

$$p(Y_k=5)=p_{N_1}(Y_k=5)p(N_1)+p_{B_1}(Y_k=5)p(B_1)=\frac{k}{(k+3)}\times\frac{3}{(k+3)}+\frac{3}{(k+3)}\times\frac{k}{(k+3)}$$

$$p(Y_k=5)=\frac{6k}{(k+3)^2}$$

(b)

$y_i =$	-9	-1	$+5$
$P(Y_k=y_i)=$	$\frac{9}{(k+3)^2}$	$\frac{k^2}{(k+3)^2}$	$\frac{6k}{(k+3)^2}$

2. $\mathrm{E}(Y_k)=-9\times\frac{9}{(k+3)^2}+(-1)\times\frac{k^2}{(k+3)^2}+5\times\frac{6k}{(k+3)^2}=\frac{-81-k^2+30k}{(k+3)^2}=\frac{-(k-3)(k-27)}{(k+3)^2}$
D'où :

$$\mathrm{E}(Y_k)>0\iff k\in]3\ ;\ 27[$$

Le jeu est favorable au joueur pour $k\in]3\ ;\ 27[$.

Exercice 9

1. (a) Le couple $(E_n,\bar{E_n})$ forme un système complet d'événements.
D'après l'énoncé, $P(E_n)=\frac{2}{3}$ et $P(\bar{E_n})=\frac{1}{3}$
La formule des probabilités totales donne

$$P(L_n)=P(E_n)P_{E_n}(L_n)+P(\bar{E_n})P_{\bar{E_n}}(L_n)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{3}$$

(b) $P(L_n)\neq 0$ et $P(E_n)\neq 0$, d'après la formule de Bayes,

$$P_{\bar{L_n}}(\bar{E_n})=P_{\bar{E_n}}(\bar{L_n})\frac{P(\bar{E_n})}{P(\bar{L_n})}=\left(1-P_{\bar{E_n}}(L_n)\right)\times\frac{P(\bar{E_n})}{1-P(L_n)}=\frac{4}{5}\times\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{2}{5}$$

2. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on pose $u_n=P(A_n)$

(a) A_1 est impossible, donc $u_1=0$ et comme les décisions du professeur sont indépendantes, $u_2=P(A_2)=P(\bar{L_1}\cap\bar{L_2})=P(\bar{L_1})\times P(\bar{L_2})=(1-P(L_1))(1-P(L_2))=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$

(b) On peut dire que $(L_1,\bar{L_1}\cap L_2,\bar{L_1}\cap\bar{L_2})$ est un système complet d'événements et par indépendance des événements, $P(L_1)=\frac{1}{3}$, $P(\bar{L_1}\cap L_2)=\frac{2}{9}$ et $P(\bar{L_1}\cap\bar{L_2})=\frac{4}{9}$.
En utilisant la formule des probabilités totales on a :

$$u_{n+2}=P(A_{n+2})=P(L_1)P_{L_1}(A_{n+2})+P(\bar{L_1}\cap L_2)P_{\bar{L_1}\cap L_2}(A_{n+2})+P(\bar{L_1}\cap\bar{L_2})P_{\bar{L_1}\cap\bar{L_2}}(A_{n+2}).$$

Mais $P_{L_1}(A_{n+2})=u_{n+1}$ (sachant L_1, sauter pour la première fois deux repas d'affilée au jours $n+1$ et $n+2$ revient à sauter pour la première fois deux repas aux jours n et $n+1$ à partir du jour 2.) et $P_{\bar{L_1}\cap L_2}(A_{n+2})=u_n$, enfin $P_{\bar{L_1}\cap\bar{L_2}}(A_{n+2})=0$ (L a manqué les deux premiers repas, les jours $n+1$ et $n+2$ ne peuvent correspondre aux premiers repas consécutifs manqués.)
Ainsi

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad u_{n+2}=\frac{1}{3}u_{n+1}+\frac{2}{9}u_n$$

(c) On résout l'équation caractéristique de la suite récurrente d'ordre 2, (u_n) ; $r^2=\frac{1}{3}r+\frac{2}{9}$. On trouve pour racines $\frac{2}{3}$ et $-\frac{1}{3}$.
Il existe donc deux constantes λ et μ telles que

$$u_n = \mu\left(\frac{2}{3}\right)^n + \lambda\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

En utilisant les valeurs u_1 et u_2 on établit le système

$$\begin{cases} -\frac{1}{3}\lambda + \frac{2}{3}\mu = 0 \\ \frac{1}{9}\lambda + \frac{4}{9}\mu = \frac{4}{9} \end{cases}$$

On obtient $\lambda = \dfrac{4}{3}$ et $\mu = \dfrac{2}{3}$.

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + \dfrac{4}{3}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$

3. (a) Par définition, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(A_k)$. Or la réunion des événements A_k sont deux à deux incompatibles, on en déduit que $S_n = P(\cup_{k=1}^{n} A_k)$.
   S_n se traduit par L a sauté au moins une fois deux repas consécutifs durant les n premiers jours.

   (b) $S_n = \dfrac{4}{3}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^k + \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{3}\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^n - 1\right) + \frac{4}{3}\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$.

   Comme $-1 < -\dfrac{1}{3} < 1$ et $-1 < \dfrac{2}{3} < 1$ alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$. Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3} = 1$$

   A terme il est probable que L saute deux repas consécutifs.

Exercice 10 (Extrait modifié ESSEC 2004)

I. Calcul matriciel

1. On trouve $P^2 = I_4$ donc P est inversible et $P^{-1} = P$.
2. Par calcul des produits

$$PD(a)P^{-1} = P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & -a & -2a^2 & -3a^3 \\ 0 & 0 & a^2 & 3a^3 \\ 0 & 0 & 0 & -a^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1-a & (1-a)^2 & (1-a)^3 \\ 0 & a & 2a(1-a) & 3a(1-a)^2 \\ 0 & 0 & a^2 & 3a^2(1-a) \\ 0 & 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix} = M(a)$$

3. Pour montrer que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad M(a)M(b) = M(ab)$, il est fortement déconseillé de faire un calcul direct, c'est beaucoup plus simple de se servir de la question précédente.
   En effet, soit $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$D(a)D(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ab & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (ab)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (ab)^3 \end{pmatrix} = D(ab)$$

   Ainsi
   $M(a)M(b) = PD(a)P^{-1}PD(b)P^{-1} = PD(a)D(b)P^{-1} = PD(ab)P^{-1}$.

   Par un raisonnement par récurrence immédiat on montre que $\forall a \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad [M(a)]^n = M(a^n)$.. (pour l'hérédité repose sur $[M(a)]^{n+1} = [M(a)]^n M(a) = M(a^n)M(a) = M(a^n a) = M\left(a^{n+1}\right)$.)

4. On a $M(c)=I \iff c=1$ immédiatement .
Soit $a\neq 0$,comme $M(a)M(b)=M(ab)$ et comme $M(ab)=I \iff ab=1$, alors, on a $M(a)M(b)=I \iff b=\dfrac{1}{a}$.
Donc $M(a)$ est inversible et son inverse est $M\left(\dfrac{1}{a}\right)$.
La matrice $M(0)$ n'est pas inversible en effet elle est triangulaire avec des termes diagonaux dont le produit est nul.

II. Etude d'une expérience aléatoire

1. $P(A_1)=P(FFF)=(1-p)^3$.
$P(B_1)=P(FFP)+P(FPF)+P(PFF)=3p(1-p)^2$.
$P(C_1)=P(FPP)+P(PFP)+P(PPF)=3p^2(1-p)$.
$P(D_1)=P(PPP)=p^3$.
2. Soit $n\in\mathbb{N}$
$P_{A_n}(A_{n+1})=1, P_{A_n}(B_{n+1})=P_{A_n}(C_{n+1})=P_{A_n}(D_{n+1})=0$, d'après la deuxième convention.
$P_{B_n}(A_{n+1})=1-p, P_{B_n}(B_{n+1})=p, P_{B_n}(C_{n+1})=P_{B_n}(D_{n+1})=0$, puisqu'on ne relance qu'une pièce, donc les résultats possibles sont 0 ou 1 pile avec les probabilités de l'énoncé.
$P_{C_n}(A_{n+1})=P(FF)=(1-p)^2, P_{C_n}(B_{n+1})=P(FP)+P(PF)=2p(1-p), P_{C_n}(C_{n+1})=p^2, P_{C_n}(D_{n+1})=0$, puisqu'on relance deux pièces, donc les résultats possibles sont 0, 1 ou 2 pile et on raisonne comme dans la question précédente.
Enfin $P_{D_n}(A_{n+1})=P(A_1)=(1-p)^3$, $P_{D_n}(B_{n+1})=3p(1-p)^2, P_{D_n}(C_{n+1})=3p^2(1-p)$ et $P_{D_n}(D_{n+1})=p^3$
3. (A_n,B_n,C_n,D_n) est un système complets d'événements, donc la formule des probabilités totales donne :

$$P(A_{n+1})=P(A_n\cap A_{n+1})+P(B_n\cap A_{n+1})+P(C_n\cap A_{n+1})+P(D_n\cap A_{n+1})$$

$$=P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1})+P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1})+P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1})+P(D_n)P_{D_n}(A_{n+1})$$

$$=P(A_n)+(1-p)P(B_n)+(1-p)^2P(C_n)+(1-p)^3P(D_n)$$

$$\begin{aligned}P(B_{n+1})&=P(A_n)P_{A_n}(B_{n+1})+P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1})+P(C_n)P_{C_n}(B_{n+1})+P(D_n)P_{D_n}(B_{n+1})\\&=0+pP(B_n)+2p(1-p)P(C_n)+3p(1-p)^2P(D_n)\\P(C_{n+1})&=P(A_n)P_{A_n}(C_{n+1})+P(B_n)P_{B_n}(C_{n+1})+P(C_n)P_{C_n}(C_{n+1})+P(D_n)P_{D_n}(C_{n+1})\\&=0+0+p^2P(C_n)+3p^2(1-p)P(D_n)\\P(D_{n+1})&=P(A_n)P_{A_n}(D_{n+1})+P(B_n)P_{B_n}(D_{n+1})+P(C_n)P_{C_n}(D_{n+1})+P(D_n)P_{D_n}(D_{n+1})\\&=0+0+0+p^3P(D_n)\end{aligned}$$

4. (a) En utilisant les expressions précédentes, si on prend $M=M(p)$, où $M(p)$ est la matrice obtenue en partie I avec $a=p$ alors $M(p)U_n$ donne U_{n+1}.

Par un raisonnement par récurrence immédiat on montre que $\forall n\in\mathbb{N},\quad U_n=M^nU_0$.

(b) $U_0=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ par convention. D'autre part on a montré en partie I, que $M(p)^n=M(p^n)$ ainsi

$$U_n=M(p^n)U_0=\begin{pmatrix}(1-p^n)^3\\3p^n(1-p^n)^2\\3(p^n)^2(1-p^n)\\(p^n)^3\end{pmatrix}$$

Exercice 11 (Ecricome 2011. Extraits)

La société Lehazard met à la disposition de ses clients un nouveau jeu en ligne dont la page d'écran affiche une grille à trois lignes et trois colonnes.

Après une mise initiale de 2 euros du joueur, une fonction aléatoire place au hasard successivement trois jetons (★) dans trois cases différentes. La partie est gagnée si les trois jetons sont alignés. Le gagnant empoche 10 fois sa mise, ce qui lui rapporte 18 euros à l'issue du jeu. Dans le cas contraire la mise initiale est perdue par le joueur.

	A	B	C
1	★		
2	★		
3		★	

On définit les événements H, V, D, N par :

- ⋆ H : « les trois jetons sont alignés horizontalement ».
- ⋆ V : « les trois jetons sont alignés verticalement ».
- ⋆ D : « les trois jetons sont alignés en diagonale ».
- ⋆ N : « les trois jetons ne sont pas alignés ».

1. Les positionnement sont déterminés par l'ensembles (sans ordre) des 3 positions distinctes parmi 9.
   il y en a donc $\binom{9}{3} = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1} = 3\cdot 4\cdot 7 = 84$
2. (H) est formé de 3 positionnements : ligne 1, 2 ou 3, les positionnements étant équiprobables (on le suppose) donc $\mathrm{P}(H) = \dfrac{3}{84}$

   (V) est formé de 3 positionnements : colonne A, B ou C donc $\mathrm{P}(V) = \dfrac{3}{84}$

   (D) comporte es deux diagonales descendants et ascendantes. Donc $\mathrm{P}(D) = \dfrac{2}{84}$
3. (H, V, D, N) étant un système complet d'événements,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(N) &= 1 - \mathrm{P}(V) - \mathrm{P}(H) - \mathrm{P}(D)\\ &= 1 - \frac{8}{84} = 1 - \frac{2}{21}\\ &= \frac{19}{21} \simeq 0.9048\end{aligned}$$

4. La société peut s'attendre à 10 000 relances par jour de ce jeu.

   (a) Pour chaque entier naturel i non nul. on note Z_i le gain de la société à la $i^{ème}$ relance.
   Lors de la *ième* relance, la société peux gagner 2 euros (la mise) si N ou en perdre 18 sinon.
   Donc $Z_i(\Omega) = \{2, -18\}$. avec $\mathrm{P}(Z_i = 2) = \mathrm{P}(N) = \frac{19}{21}$ et $\mathrm{P}(Z_i = -18) = \frac{2}{21}$, donc

$$\begin{aligned}E(Z_i) &= 2\frac{19}{21} - 18\frac{2}{21}\\ &= \frac{38 - 36}{21} = \frac{2}{21}\end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{E(Z_i) = \frac{2}{21} \simeq 0,1}$

   (b) le gai total est la somme des gains à chaque relance donc $Z = \sum Z_i$ et $E(Z) = 10000 \cdot \frac{2}{21} \simeq 1000$
   Conclusion : $\boxed{\text{En moyenne, la société gagnera à peu près 1000€ par jour}}$, mais elle peut espérer beaucoup plus !

PARTIE III. Contrôle de la qualité du jeu.

On constate que, parfois, la fonction aléatoire est déréglée. Dans ce cas, elle place le premier jeton dans la case $(A, 1)$, les deux autres étant placés au hasard dans les cases restantes. On note Δ l'événement « la fonction aléatoire est déréglée »et on pose $\mathrm{P}(\Delta) = x$ avec $x \in]0, 1[$.

1. Sachant Δ, les positions sont déterminées par la seule combinaison des 2 autres positions parmi les 8 restantes.
Il y a donc $\binom{8}{2} = \frac{8\cdot 7}{2\cdot 1} = 28$ positionnements possibles et équiprobables.
(H) est à présent réduit à la ligne 1, V à la colonne A et D à la diagonale descendante.
Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}_\Delta(H) = \mathrm{P}_\Delta(V) = \mathrm{P}_\Delta(D) = \frac{1}{28}}$
2. On a donc $\mathrm{P}_\Delta(N) = 1 - \frac{3}{28} = \frac{25}{28}$
Sachant $\overline{\Delta}$, l'expérience se fait dans les conditions de la partie I et les probabilités sont donc celle de la partie I : $\mathrm{P}_{\overline{\Delta}}(N) = \frac{19}{21}$
$\left(\Delta, \overline{\Delta}\right)$ est un système complet d'événement donc
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(N) &= \mathrm{P}_{\overline{\Delta}}(N)\cdot \mathrm{P}(\Delta) + \mathrm{P}_\Delta(N)\cdot \mathrm{P}(\Delta)\\ &= x\frac{25}{28} + (1-x)\frac{19}{21}\\ &= x\frac{25}{4\cdot 7} + (1-x)\frac{19}{3\cdot 7}\\ &= \frac{25\cdot 3 - 19\cdot 4}{3\cdot 4\cdot 7}x + \frac{19}{21}\\ &= -\frac{x}{84} + \frac{19}{21}\end{aligned}$$
Conclusion : $\boxed{\text{la probabilité les jetons ne soient pas alignés est égal à } \mathrm{P}(N) = -\frac{x}{84} + \frac{19}{21}}$
3. Soit G la variable aléatoire égale au gain réalisé par la société de jeu lors d'une partie jouée.
On a donc $\mathrm{P}(G=2) = \mathrm{P}(N)$ et $\mathrm{P}(G=-18) = \mathrm{P}\left(\bar{N}\right) = 1 - \mathrm{P}(N)$
Donc
$$\begin{aligned}E(G) &= 2\left(-\frac{x}{84} + \frac{19}{21}\right) - 18\left(1 + \frac{x}{84} - \frac{19}{21}\right)\\ &= -\frac{20}{84}x + \frac{2}{21}\end{aligned}$$
Donc
$$\begin{aligned}E(G) > 0 &\iff -\frac{20}{84}x + \frac{2}{21} > 0\\ &\iff x < \frac{2}{21}\frac{84}{20} = \frac{2}{5}\end{aligned}$$
Conclusion : $\boxed{\text{le gain moyen reste positif tant que } x < \frac{2}{5}}$
4. On joue une partie. On constate que les jetons sont alignés.
la fonction aléatoire a été déréglée si Δ
On cherche donc $\mathrm{P}_{\bar{N}}(\Delta)$ par la formule de Bayes :
$$\begin{aligned}\mathrm{P}_{\bar{N}}(\Delta) &= \frac{\mathrm{P}\left(\Delta\cap\bar{N}\right)}{\mathrm{P}\left(\bar{N}\right)}\\ &= \frac{\mathrm{P}(\Delta)\,\mathrm{P}_\Delta\left(\bar{N}\right)}{\mathrm{P}\left(\bar{N}\right)}\\ &= \frac{x\cdot\frac{3}{28}}{1-\left(-\frac{x}{84}+\frac{19}{21}\right)}\\ &= \frac{x\cdot\frac{3}{28}}{\frac{2}{21}+\frac{x}{84}} = \frac{9x}{x+8}\end{aligned}$$
Conclusion : $\boxed{\text{Si les jetons sont alignés, la fonction aléatoire a été déréglée avec une probabilité } \frac{9x}{x+8}}$

Exercice 12

Exercice 13 (D'après ECRICOME 2001)

Dans cet exercice on étudie l'évolution au cours du temps d'un titre dans une bourse de valeurs.

1.1. Le but de la première partie est de calculer les puissances successives de la matrice :

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}$$

où a représente un nombre réel.

(a) On calcule de chaque côté :

$$\begin{aligned} M(a)\,M(b) &= \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-2b & b & b \\ b & 1-2b & b \\ b & b & 1-2b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-2b-2a+6ab & b-3ab+a & b-3ab+a \\ b-3ab+a & 1-2b-2a+6ab & b-3ab+a \\ b-3ab+a & b-3ab+a & 1-2b-2a+6ab \end{pmatrix} \\ &= M(a+b-3ab) \end{aligned}$$

(b) Pour l'inversibilité, on pense à $AB = I$...
Si on a $M(a+b-3ab) = I$, on aura l'inversibilité de $M(a)$. Or ceci est vrai pour $a+b-3ab = 0$
On cherche pour quelles valeurs de a on a peut trouver b tel que $a+b-3ab = 0 \iff b(1-3a) = -a$
Donc **si** $a \neq 1/3$ alors avec $b = \frac{a}{3a-1}$ on a $M(a)\,M(b) = M(0) = I$ et $M(a)$ est alors inversible d'inverse $M(a)^{-1} = M\left(\frac{a}{3a-1}\right)$
Reste à examiner le cas $a = \frac{1}{3}$:
$M\left(\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ et comme les colonnes sont liées, la matrice n'est pas inversibles.
Conclusion : $\boxed{M(a) \text{ est inversible uniquement pour } a \neq 1/3}$

(c) La matrice $M(a)$ étant symétrique, elle est diagonalisable.

(d) Soit $a \neq 0$
On n'oublie pas qu'un carré est un produit : $M(a)^2 = M(a)\,M(a) = M\left(2a-3a^2\right)$
Donc $M(a)^2 = M(a) \iff M\left(2a-3a^2\right) = M(a) \iff 2a-3a^2 = a$ par identification des coefficients
On résout : $2a-3a^2 = a \iff a-3a^2 = 0 \iff a(1-3a) = 0 \iff a = 1/3$ puisque l'on cherche $a \neq 0$
Donc $a_0 = 1/3$ est l'unique réel vérifiant $M(a_0)^2 = M(a_0)$

(e) On considère les matrices :

$$P = M(a_0) \quad \text{et} \quad Q = I - P$$

où I désigne la matrice carrée unité d'ordre 3.
On a donc $P = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

i. Pour montrer l'existence de α, on peut le chercher au brouillon et le donner :
Au brouillon : $M(a) = P + \alpha Q$

$$\iff \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 1-2a = \frac{1+2\alpha}{3} \\ a = \frac{1-\alpha}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 1-3a \\ 0 = 0 \end{cases}$$

rédaction : soit $\alpha = 1 - 3a$ on a
$P + \alpha Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + (1-3a)\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = M(a)$
Ou bien on rédige directement la recherche par équivalence. (seule la réciproque est en fait utile)

ii. $P^2 = M(a_0)^2 = M(a_0) = P$
$QP = (I-P)P = P - P^2 = P - P = 0$
$P(I-P) = 0,$
$Q^2 = (I-P)^2 = I - 2P + P^2 = I - P = Q$

iii. On peut procéder par récurrence **ou utiliser la formule du binôme** (plus technique !)
Comme $P\,Q = Q\,P$ alors $[M(a)]^n = [P + \alpha Q] = \sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} P^k\alpha^{n-k}Q^{n-k}$
Or $P^k = P$ si $k \geq 1$ et $Q^{n-k} = Q$ si $n - k \geq 1 \iff k \leq n-1$ et on découpe donc la somme :

$$\begin{aligned} [M(a)]^n &= [P+\alpha Q] = \sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} P^k\alpha^{n-k}Q^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\alpha^{n-k}P\,Q + \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix}P^0\alpha^nQ + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}P\alpha^{n-k}Q^0 \\ &= 0 + \alpha^nQ + P \\ &= \alpha^nQ + P \end{aligned}$$

N.B. le découpage de la somme n'est valable que pour $n \geq 2$
Reste à voire pour $n = 0$ et $n = 1$: $M(a)^0 = I = Q + P$ (ce qui est la formule précédente pour $n = 0$)
Et pour $n = 1$ on a $M(a) = P + \alpha Q$ (ce qui est encore la formule précédente pour $n = 1$)
Donc partout entier n : $M(a)^n = \alpha^nQ + P$ est bien comme combinaison linéaire de Q et P
Ou par récurrence

- ⋆ Pour $n = 1$, $\quad [M(a)]^1 = M(a) = P + \alpha Q$ donc $x_1 = 1$ et $y_1 = \alpha$ conviennent
(cela était déjà vrai pour $n = 0$ mais l'énoncé ne le demandait qu'à partir de 0)
- ⋆ Soit $n \geq 1$ tel qu'il existe x_n et y_n réels tels que $[M(a)]^n = x_nP + y_nQ$ avec x_n et y_n réels alors $[M(a)]^{n+1} = (x_nP + y_nQ)(P + \alpha Q) = x_nP^2 + y_nQP + \alpha x_nPQ + \alpha y_nQ^2 = x_nP + \alpha y_nQ$
Donc avec $x_{n+1} = x_n$ et $y_{n+1} = \alpha y_n$ qui sont bien des réels, on a $[M(a)]^{n+1} = x_{n+1}P + y_{n+1}Q$
- ⋆ Donc pour tout entier n on a $[M(a)]^n = x_nP + y_nQ$ combinaison linéaire de P et de Q avec $x_{n+1} = x_n$ et $y_{n+1} = \alpha y_n$

iv. Si on a utilisé le binôme, on n'a plus rien à faire : $M(a)^n = \alpha^nQ + P$
Pour la récurrence : la suite x est constante donc $x_n = x_1 = 1$ et y est géométrique de raison α donc $y_n = \alpha^{n-1}y_1 = \alpha^n$
Donc pour tout entier $n \geq 1$, $\quad [M(a)]^n = P + \alpha^nQ$

1.2. Évolution d'un titre boursier au cours du temps.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $a \in \left]0, \frac{2}{3}\right[$.

1. On définit des suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par leur premier terme p_1, q_1, r_1, et les relations de récurrence :

$$\begin{cases} p_{n+1} = (1-2a)p_n + aq_n + ar_n \\ q_{n+1} = ap_n + (1-2a)q_n + ar_n \\ r_{n+1} = ap_n + aq_n + (1-2a)r_n \end{cases}$$

(a) Comme $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = M(a)\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$ on a alors pour tout entier n,

$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = [M(a)]^{n-1}\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{pmatrix} = \left[\alpha^{n-1}Q + P\right]\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{pmatrix}$

(b) On a $\alpha = 1-3a$ et comme $0<a<2/3$ alors $0>-3a>-2$ et $1>1-3a>-1<$ donc $|\alpha|<1$ donc $\alpha^n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$

Donc $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} \underset{n\to+\infty}{\to} P\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(p_1+q_1+r_1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. (a) (M_n, S_n, B_n) formant un système complet d'événements donc

$$\begin{aligned} p(M_{n+1}) &= p(M_{n+1}/M_n)\,p(M_n) + p(M_{n+1}/S_n)\,p(S_n) + p(M_{n+1}/B_n)\,p(B_n) \\ &= \frac{2}{3}p(M_n) + \frac{1}{6}p(S_n) + \frac{1}{6}p(B_n) \end{aligned}$$

et de la même façon

$$\begin{aligned} p(S_{n+1}) &= \frac{1}{6}p(M_n) + \frac{2}{3}p(S_n) + \frac{1}{6}p(B_n) \\ p(B_{n+1}) &= \frac{1}{6}p(M_n) + \frac{1}{6}p(S_n) + \frac{2}{3}p(B_n) \end{aligned}$$

(b) On retrouve les relations de récurrence précédentes avec $p_n = p(M_n)$, $q_n = p(S_n)$ et $r_n = p(B_n)$ et $a = 1/6 \in]0, 2/3[$ et $\alpha = 1 - 3/6 = 1/2 < 2/3$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p(M_n) \\ p(S_n) \\ p(B_n) \end{pmatrix} &= \left(\frac{1}{2^{n-1}}Q + P\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2^{n-1}}Q\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + P\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3\cdot 2^{n-1}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1-1/2^{n-1} \\ 1+2/2^{n-1} \\ 1-1/2^{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc $p(M_n) = p(B_n) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$ et $p(S_n) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$

(c) Et quand n tend vers $+\infty$ ces trois probabilités tendent vers $1/3$ car $a < 2/3$ (car $p_1 + q_1 + r_1 = 1$ SCE)

Exercice

[**Urnes, boules et suites**]

Exercice 15 (Urnes, boules et indépendance)

[**Urnes, boules et indépendance**]

1. On suppose qu'il n'y a pas remise. On peut donc assimiler ce tirage à un tirage simultané.

Le nombre total de tirages possibles est donc $\binom{13}{4} = \frac{13!}{4!9!} = \frac{13\times 12\times 11\times 10}{4\times 3\times 2} = 13\times 11\times 5 = 715$

On a alors :

$P(E\cap F) = P(\{BBRR\}) = \dfrac{\binom{3}{2}\binom{4}{2}}{\binom{13}{4}} = \dfrac{18}{715}$

De plus, par un raisonnement similaire $P(F) = \dfrac{\binom{9}{2}\binom{4}{2}}{\binom{13}{4}} = \dfrac{216}{715}$ (les deux boules restantes sont à tirer parmi les 9 boules non rouges).

Et $P(E) = \dfrac{\binom{3}{2}\binom{10}{2}}{\binom{13}{4}} = \dfrac{135}{715} = \dfrac{27}{143}$.

La formule des probabilités conditionnelles et les calculs précédents donnent donc :
$P_F(E) = \frac{\frac{18}{715}}{\times}\frac{216}{715} = \frac{1}{12}$.
Et $P_E(F) = \frac{\frac{18}{715}}{\frac{135}{715}} = \frac{2}{15}$
Enfin $P(E)P(F) = \frac{27}{143}\frac{216}{715} \neq \frac{18}{715} = P(E \cap F)$ donc les événements E et F ne sont pas indépendants.

2. Pour calculer $P(F)$, cela revient à calculer $P(X=2)$ où X est la variable aléatoire qui compte le nombre de boules rouges tirées. On a, par indépendance, X qui suit une loi binomiale de paramètres $n=4$ et $p = \frac{4}{13}$.
Donc, $P(F) = \binom{4}{2}\left(\frac{4}{13}\right)^2\left(\frac{9}{13}\right)^2 = 6\frac{4^2 \times 9^2}{13^4}$.
Comme n est assez petit, on peut aussi tout énumérer à la main.
$P(F) = P(RR\overline{R}\overline{R}) + P(R\overline{R}R\overline{R}) + P(R\overline{R}\overline{R}R) + P(\overline{R}RR\overline{R}) + P(\overline{R}R\overline{R}R) + P(\overline{R}\overline{R}RR)$ et on trouve la même chose.
De même $P(E) = \binom{4}{2}\left(\frac{3}{13}\right)^2\left(\frac{10}{13}\right)^2$
Pour calculer la probabilité de $E \cap F$ une solution est la suivante :
On note A : « les 4 boules tirées sont tirées parmi les 7 boules non noires
$P(E \cap F) = P(A)P_A(E \cap F)$.
Or : $P(A) = P(X=4)$ où X suit une loi binomiale de paramètre $n=4$ et $p = \frac{7}{13}$ donc :
$P(A) = \left(\frac{7}{13}\right)^4$.
Enfin, $P_A(E \cap F) = P(Y=2)$ où Y suit une loi binomiale de paramètre $n=4$ et $p = \frac{3}{7}$ donc :
$P_A(E \cap F) = \binom{4}{2}\left(\frac{3}{7}\right)^2\left(\frac{4}{7}\right)^2$
On obtient $P(E \cap F) = 6 \times \frac{3^2 \times 4^2}{13^4}$

Exercice 16 (Des urnes et des boules Des urnes et des boules)

C'est le même exercice que le précédent, avec des valeurs plus grandes encore (laisser les résultats sans les simplifier est mon conseil) et plus de cas à considérer. Si vous avez bien compris la correction du précédent, n'hésitez pas à me proposer une solution ! Bon courage.

Exercice 17 (Commencer par le plus facile ?)

La cible à 20 m sera appelée cible 1, et l'autre cible 2. On note C_{ij} l 'évènement atteindre la cible i au tir j avec $i \in \{1,2\}$ et $j \in \{1,2,3\}$. Si l 'archer commence par la cible à 20 m, l'évènement gagner le jeu est :

$$(C_{11} \cap C_{22}) \cup (\overline{C_{11}} \cap C_{22} \cap C_{13}).$$

Il s'agit d'une réunion d'événements incompatibles. De plus, par hypothèse, pour $(i,\ j) \neq (k,l)$, les évènements C_{ij} et C_{kl} sont indépendants. La probabilité de gagner en commençant par la cible à 20 m est donc :

$$P(C_{11})P(C_{22}) + P(\overline{C_{11}})P(C_{22})P(C_{13}) = pq + (1-p)qp = (2-p)qp.$$

De manière similaire, on montre que la probabilité de gagner en commençant par la cible 2 est :

$$P(C_{21})P(C_{12}) + P(\overline{C_{21}}))P(C_{12})P(C_{23}) = qp + (1-q)pq = (2-q)qp.$$

Comme $p > q$, le joueur a intérêt à commencer par la cible à 50 m.

Exercice 18

Exercice 19 (Suites, probabilités et matrices)

On considère les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. et $M = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

1. **Calcul de M^n :**
   Montrons que, pour tout entier naturel n : $M^n = \dfrac{1}{2^n}I + \dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)J$.
   On va montrer cette égalité par récurrence sur n.
   $\dfrac{1}{2^0}I + \dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{1}{2^0}\right)J = I + 0J = I$ et $M^0 = I$ donc l'égalité est vraie pour $n = 0$.
   On peut vérifier facilement par la calcul qu'elle est vraie au rang 1, c'est à dire que $M = \dfrac{1}{2}I + \dfrac{1}{6}J$ car on en a besoin pour l'hérédité.
   Enfin, pour $n \in \mathbb{N}$, si on suppose l'égalité vraie, on a (en se servant de $IJ = JI = J$) :
   $M^{n+1} = MM^n = \left(\dfrac{1}{2}I + \dfrac{1}{6}J\right)\left(\dfrac{1}{2^n}I + \dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)J\right) = \dfrac{1}{2^{n+1}}I + \left(\dfrac{1}{2^n}\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)\right)J + \dfrac{1}{6}\dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)J^2$.
   enfin, on remarque que $J^2 = 3J$ et on remplace et on simplifie le coefficient de J, ce qui vous conduira, je n'en doute pas, au bon résultat... (bon courage pour ceux qui ont du mal sur les puissances, mais franchement, le plus dur est fait).
2. C'est la même chose que l'exercice précédent (et tant d'autres...)

Exercice 20

1. Pour une manche, « C gagne »est l'événement contraire de « A gagne ou B gagne ». Donc $\mathbb{P}(C) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) = 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$ (car A et B sont incompatibles). On a donc $\boxed{\mathbb{P}(C) = \dfrac{3}{5}}$.
2. (a) A gagne le match à l'issue de la deuxième manche (événement noté AA) si et seulement si il gagne ces deux manches. Par indépendance entre les différentes manches, $\boxed{\mathbb{P}(AA) = \left(\dfrac{1}{5}\right)^2}$.

   De la même manière et avec les mêmes notations, on obtient : $\boxed{\mathbb{P}(BB) = \left(\dfrac{1}{5}\right)^2 \text{ et } \mathbb{P}(CC) = \left(\dfrac{3}{5}\right)^2}$.

   (b) Comme il y a au minimum deux manches dans ce jeu, l'événement contraire de : « le jeu comporte au moins trois manches »(noté $M \geqslant 3$) est « un des joueurs gagne à l'issue de la deuxième manche »$= AA \cup BB \cup CC$, union d'événements incompatibles.

   On obtient donc $\boxed{\mathbb{P}(M \geqslant 3) = 1 - \left(\dfrac{1}{5}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{5}\right)^2 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = 1 - \dfrac{1}{25} - \dfrac{1}{25} - \dfrac{9}{25} = \dfrac{14}{25}}$.

   (c) A gagne le match à l'issue de la troisième manche (événement noté $AM3$) si et seulement si A perd la première manche (probabilité $\dfrac{4}{5}$) et gagne les deux suivantes (probabilité $\mathbb{P}(AA)$, par indépendance) .

   Par indépendance, on trouve $\boxed{\mathbb{P}(AM3) = \dfrac{4}{5}\left(\dfrac{1}{5}\right)^2 = \dfrac{4}{125}}$.

   (d) Notons C_1 l'événement « C gagne la première partie ». On cherche ici à calculer $\mathbb{P}_{AM3}(C_1) = \dfrac{\mathbb{P}(AM3 \cap C_1)}{\mathbb{P}(AM3)}$.

Or, $AM3 \cap C_1 = CAA$, en se servant des notations du 1.b, et $\mathbb{P}(CAA) = \frac{3}{5}\frac{1}{5}\frac{1}{5} = \frac{3}{125}$ par indépendance entre les différentes manches. On obtient donc : $\boxed{\mathbb{P}_{AM3}(C_1) = \frac{\frac{3}{125}}{\frac{4}{125}} = \frac{3}{4}}$.

3. Ces événements sont compliqués à énoncer et donc à comprendre ! Mais il n'y a pas trop le choix, en y réfléchissant bien, si on veut mettre en place un système d'événements complets (noté SCE à l'avenir) à chaque tirage. Ici, une réflexion un peu poussée confirme que : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, (A_n; B_n; C_n; D_n) \text{ est un SCE}}$.

   En effet, les événements A_n, B_n et C_n sont clairement incompatibles et, si l'un de ces trois événements ne se produit pas, c'est que la partie n'a pas continuée à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ manche ou bien s'est arrêtée avant même cette manche, ce qui est exactement D_n.

   (a) On a clairement (une partie ne peut s'arrêter à l'issue d'une manche) $\boxed{\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(B_1) = \frac{1}{5}, \text{ et } \mathbb{P}(C_1) = \frac{3}{5}}$.

   De plus, comme une partie comporte au minimum deux manches et par indépendance des tirages :
   $A_2 = (B_1 \cap A_2) \cup (C_1 \cap A_2)$ car pour que le jeu continue, A ne doit pas avoir gagné deux parties successives.
   Remarque : si on veut simplifier (ce qui n'est pas indispensable à ce stade c ar l'indépendance des manches et l'incompatibilité des deux événements de l'union permet le calcul, on a aussi $A_2 = \overline{A_1} \cap A_2$. Le seul problème est que cette simplification ne se généralise pas aux rangs suivants tandis que la formule de départ oui (car $D_1 = \emptyset$ alors que $D_n \neq \emptyset$ pour $n \geqslant 2$.

   On obtient, dans tous les cas, $\boxed{\mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{5}\frac{1}{5} + \frac{3}{5}\frac{2}{5} = \frac{4}{25}.}$

   De même, on a :

   $B_2 = (A_1 \cap B_2) \cup (C_1 \cap B_2)$, qui donne $\boxed{\mathbb{P}(B_2) = \frac{4}{25}}$, $C_2 = (A_1 \cap C_2) \cup (B_1 \cap C_2)$, qui donne $\boxed{\mathbb{P}(C_2) = \frac{6}{25}}$.

   (b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, les événements $A_{n+1} \cap A_n$ et $A_{n+1} \cap D_n$ sont $\boxed{\text{impossibles}}$. En effet, si gagne la manche n et la manche $n+1$, alors le jeu s'arrête et ne peut donc pas continuer.
   Et si D_n se réalise, le jeu s'arrête à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ manche et donc A ne peut pas gagner la manche suivante, puisqu'elle n'a pas lieu.

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Appliquons la formule des probabilités totales avec le SCE $(A_n; B_n; C_n; D_n)$:
   $$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_{n+1}) &= \mathbb{P}(A_n \cap A_{n+1}) + \mathbb{P}(B_n \cap A_{n+1}) + \mathbb{P}(C_n \cap A_{n+1}) + \mathbb{P}(D_n \cap A_{n+1}) \\ &= \mathbb{P}(\emptyset) + \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(C_n)\mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(\emptyset), \\ &= 0 + \mathbb{P}(B_n) \times \frac{1}{5} + \mathbb{P}(C_n) \times \frac{1}{5} + 0 \end{aligned}$$
   les probabilités conditionnelles étant simples, du fait de l'indépendance de chaque manche.

   On obtient bien, par factorisation, $\boxed{\mathbb{P}(A_{n+1}) = \frac{1}{5}(\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(C_n))}$.

   (d) C'est exactement le même raisonnement, les événements impossibles qui serviront pour la deuxième égalité sont $B_n \cap B_{n+1}$ et $D_n \cap B_{n+1}$ et, pour la troisième égalité, $C_n \cap C_{n+1}$ et $D_n \cap C_{n+1}$.

On obtient bien : $\boxed{\begin{cases} \mathbb{P}(A_{n+1}) = & \frac{1}{5}\left(\mathbb{P}(B_n)+\mathbb{P}(C_n)\right) \\ \mathbb{P}(B_{n+1}) = & \frac{1}{5}\left(\mathbb{P}(A_n)+\mathbb{P}(C_n)\right) \\ \mathbb{P}(C_{n+1}) = & \frac{3}{5}\left(\mathbb{P}(A_n)+\mathbb{P}(B_n)\right) \end{cases}}$

4. (a) Démontrons par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(B_n)$.

   Initialisation : $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(B_1)$ d'après le 3.a donc $\boxed{\text{l'égalité est vérifiée au rang 1}}$.

   Transmission : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(B_n)$..
   On a alors $\mathbb{P}(A_{n+1}) = \frac{1}{5}\left(\mathbb{P}(B_n)+\mathbb{P}(C_n)\right) = \frac{1}{5}\left(\mathbb{P}(A_n)+\mathbb{P}(C_n)\right) = \mathbb{P}(B_{n+1})$, en se servant des deux premières égalités du système précédent. Donc $\boxed{\text{l'égalité est vraie au rang } n+1}$.

   Conclusion : par principe de récurrence, $\boxed{\text{l'égalité est vraie pour tout } n \in \mathbb{N}^*}$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on déduit de la dernière égalité du système que :

   $\boxed{\mathbb{P}(C_{n+1}) = \frac{3}{5}\left(\mathbb{P}(A_n)+\mathbb{P}(A_n)\right) = \frac{6}{5}\mathbb{P}(A_n)}$.

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a alors, en écrivant la première égalité du système au rang $n+1$, puis en se servant des résultat des deux questions précédentes :

   $$\mathbb{P}(A_{n+2}) = \frac{1}{5}\left(\mathbb{P}(B_{n+1})+\mathbb{P}(C_{n+1})\right) = \frac{1}{5}\left(\mathbb{P}(A_{n+1})+\frac{6}{5}\mathbb{P}(A_n)\right) = \boxed{\frac{1}{5}\mathbb{P}(A_{n+1})+\frac{6}{25}\mathbb{P}(A_n)}\ .$$

5. (a) La question précédente montre que la suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une $\boxed{\text{suite récurrente linéaire double}}$.

   La relation de récurrence peut s'écrire sous la forme :
   $\mathbb{P}(A_{n+2}) - \frac{1}{5}\mathbb{P}(A_{n+1}) - \frac{6}{25}\mathbb{P}(A_n) = 0$, ce qui conduit à la résolution de l'équation :
   $x^2 - \frac{1}{5}x - \frac{6}{25}$. On a $\Delta = \left(\frac{1}{5}\right)^2 - 4\times 1\times\left(-\frac{6}{25}\right) = \frac{1}{25}+\frac{24}{25} = 1$.

   Puis : $\boxed{x_1 = \dfrac{\frac{1}{5}-1}{2} = -\frac{2}{5} \text{ et } x_2 = \dfrac{\frac{1}{5}+1}{2} = \frac{3}{5}}$.

   Par conséquent, il existe deux réels λ et μ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\boxed{\mathbb{P}(A_n) = \lambda\left(-\frac{2}{5}\right)^n + \mu\left(\frac{3}{5}\right)^n}$.

   Enfin, les calculs de la question 3.a donnent : $\boxed{\begin{cases} \frac{1}{5} = \mathbb{P}(A_1) = & & -\frac{2}{5}\lambda + \frac{3}{5}\mu \\ \frac{4}{25} = \mathbb{P}(A_2) = & \lambda\left(-\frac{2}{5}\right)^2 + \mu\left(\frac{3}{5}\right)^2 = & \frac{4}{25}\lambda + \frac{9}{25}\mu \end{cases}}$

   Pour résoudre ce système, il est commode de multiplier la première ligne par 5 et la seconde à 25, afin de se débarrasser des fractions. On obtient : $\begin{cases} -2\lambda + 3\mu = & 1 L_1 \\ 4\lambda + 9\mu = & 4 L_2 \end{cases}$

   La combinaison $2L_1 + L_2$ donne : $15\mu = 6 \iff \mu = \frac{2}{5}$.

La combinaison $-3L_1 + L_2$ donne : $10\lambda = 1 \iff \lambda = \frac{1}{10}$.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{10}\left(-\frac{2}{5}\right)^n + \frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^n}$.

(b) On a donc, pour $n \geqslant 1, \mathbb{P}(C_{n+1}) = \frac{6}{5}\mathbb{P}(A_n)$, ce qui revient exactement à dire que,

$\boxed{\text{pour } n \geqslant 2,\ \mathbb{P}(C_n) = \frac{6}{5}\mathbb{P}(A_{n-1})}$. On obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C_n) = & \frac{6}{5}\left(\frac{1}{10}\left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right) \\ = & -3\left(-\frac{2}{5}\right)\frac{1}{10}\left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1} + 2\frac{3}{5}\frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}. \\ = & -\frac{3}{10}\left(-\frac{2}{5}\right)^n + \frac{4}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^n \end{aligned}$$

Pour $n = 1$, on a bien $\boxed{-\frac{3}{10}\left(-\frac{2}{5}\right) + \frac{4}{5}\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{25} + \frac{12}{25} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} = \mathbb{P}(C_1)}$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}(D_n) = 1 - (\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(C_n)) = 1 - 2P(A_n) - P(C_n)$. On obtient, après simplification :

$\boxed{\mathbb{P}(D_n) = 1 + \frac{1}{10}\left(-\frac{2}{5}\right)^n - \frac{8}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^n}$.

Comme $-1 < -\frac{2}{5} < 1$ et $-1 < \frac{3}{5} < 1$, les deux derniers termes tendent vers 0 et $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(D_n) = 1}$,

ce qui signifie que la probabilité que le jeu s'arrête va tendre vers 1,

donc qu' $\boxed{\text{on est presque sûr que le jeu s'arrête au bout d'un grand nombre de parties}}$.