Exercice 12

Pour $n \in \mathbb{N}$, on introduit la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = x^n - nx + 1$.

1. La solution est faite au tableau en classe.
2. Montrons que (a_n) est décroissante. Pour tout tout entier$n \geqslant 3$, f_n est décroissante. Donc $a_n \geqslant a_{n+1} \Leftrightarrow f_n(a_n) \leqslant f_n(a_{n+1}) \Leftrightarrow f_n(a_n) \leqslant f_n(a_{n+1}) \Leftrightarrow 0 \leqslant f_n(a_{n+1})$.
   Comme $f_{n+1}(a_{n+1}) = 0$ on a $a_{n+1}^{n+1} = (n+1)a_{n+1} - 1$.
   Donc $f_n(a_{n+1}) = a_{n+1}^n - na_{n+1} + 1 = a_{n+1}^n - ((n+1)a_{n+1} - 1) + a_{n+1} = a_{n+1}^n - a_{n+1}^{n+1} + a_{n+1}$. Comme $0 < a_{n+1} < 1$, on a $a_{n+1}^n - a_{n+1}^{n+1} = a_{n+1}^n(1 - a_{n+1}) > 0$ et par conséquent $a_{n+1}^n - a_{n+1}^{n+1} + a_{n+1} \geqslant 0$, soit $f_n(a_{n+1}) \geqslant 0$. Donc (a_n) est décroissante. De plus (a_n) est minorée par 0, donc elle converge.
3. On a pour tout entier $n \geqslant 3$, $f_n(\frac{2}{n}) = 2 - n < 0$ et $f_n(0) = 1 > 0$ et f_n continue, donc d'après le TVI, f_n s'annule sur $[0\,;\frac{2}{n}]$ ($\subset]0\,;1[$), en vertu de l'unicité de a_n on a $0 < a_n < \frac{2}{n}$.
   (a_n) converge vers 0 d'après le théorème d'encadrement.
4. On admet que pour $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $(1+t)^n \geqslant 1 + nt + \frac{n(n-1)}{2}t^2$.
   Démontrons que, pour tout $n \geqslant 3$, on a $1 + \frac{2}{\sqrt{n}} < b_n$.
   On a $b_n < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow b_n - 1 < \frac{2}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow (b_n - 1)^2 < \frac{4}{n}$ car $b_n - 1 > 0$ et la fonction carrée est croissante sur $[0\,;+\infty[$.
   On pose $t = b_n - 1$ et en utilisant l'indication ci-dessus on a $1 + n(b_n - 1) + \frac{n(n-1)}{2}(b_n - 1)^2 \leqslant b_n^n$. Or $b_n^n = nb_n - 1$, d'où $1 + n(b_n - 1) + \frac{n(n-1)}{2}(b_n - 1)^2 \leqslant nb_n - 1$. Ce qui donne $\frac{n(n-1)}{2}(b_n - 1)^2 \leqslant n - 2$, soit $(b_n - 1)^2 \leqslant (n-2)\frac{2}{n(n-1)}$ Comme $n - 2 < n - 1 < 2(n-1)$, on a $(n-2)\frac{2}{n(n-1)} \leqslant \frac{4}{n}$. Donc $(b_n - 1)^2 < \frac{4}{n}$. Finalement $b_n < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$.
   L'encadrement $1 < b_n < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$ implique que (b_n) converge vers 1 d'après le théorème de l'encadrement.