

Sommes doubles

1 Sommes doubles à indices indépendants

On considère des réels $x_{i,j}$ avec $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$. On range ces valeurs dans un tableau:

$$\begin{array}{cccccc} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,j} & \cdots & x_{1,m} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,j} & \cdots & x_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{i,1} & x_{i,2} & \cdots & x_{i,j} & \cdots & x_{i,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \cdots & x_{n,j} & \cdots & x_{n,m} \end{array}$$

On souhaite calculer la somme S de tous ces termes:

- **Sommation suivant les lignes:** On calcule la somme des termes de la première ligne, puis on ajoute les termes de la deuxième ligne, ... et enfin la somme des termes de la n -ième ligne:

$$S = \sum_{j=1}^m x_{1,j} + \sum_{j=1}^m x_{2,j} + \dots + \sum_{j=1}^m x_{i,j} + \dots + \sum_{j=1}^m x_{n,j} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m x_{i,j} \right)$$

- **Sommation suivant les colonnes:** On calcule la somme des termes de la première colonne, puis on ajoute les termes de la deuxième colonne, ... et enfin la somme des termes de la m -ième colonne:

$$S = \sum_{i=1}^n x_{i,1} + \sum_{i=1}^n x_{i,2} + \dots + \sum_{i=1}^n x_{i,j} + \dots + \sum_{i=1}^n x_{i,m} = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n x_{i,j} \right)$$

On obtient évidemment la même somme avec ces deux méthodes d'où la formule d'interversion suivante:

Propriété 1 (Interversion de sommes à indices indépendants)

Considérons $n \times m$ réels $x_{i,j}$, avec $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$. Alors la somme S de tous ces termes est:

$$S = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m x_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n x_{i,j} \right).$$

On notera S sous la forme plus concise $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} x_{i,j}$ ou $\sum_{1 \leq i, j \leq n}$ lorsque $n = m$.

Exemple. Avec $n = 3$, on a:

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i, j \leq 3} x_{i,j} &= \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 x_{i,j} \right) = x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} + x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3} \\ &= \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 x_{i,j} \right) = x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1} + x_{1,2} + x_{2,2} + x_{3,2} + x_{1,3} + x_{2,3} + x_{3,3}. \end{aligned}$$

Exercice 1 1. Écrire sans les symboles \sum l'expression: $\sum_{\substack{1 \leq i < 2 \\ 1 \leq j \leq 4}} \frac{i}{j}$.

2. Écrire avec le symbole \sum l'expression: $1 \times 1^2 + 2 \times 1^2 + 3 \times 1^2 + 1 \times 2^2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^2$.

Exercice 2 On considère la procédure suivante:

```
n=input('Donner une valeur de n: ')
S=0
for i=1:n do
    for j=1:n do
        S=S+i*j^2
    end
end
disp(S)
```

1. Entrer dans l'éditeur de Scilab cette procédure. Tester pour différentes valeurs de n . A quoi correspond la valeur de S donnée en sortie?
2. Calculer S "à la main" et vérifier le résultat grâce aux valeurs obtenues avec Scilab.

Exercice 3 On considère les sommes suivantes, où n est un entier ≥ 2 :

$$S_n = \sum_{1 \leq i, j \leq n} i, \quad T_n = \sum_{1 \leq i, j \leq n} j2^i \quad \text{et} \quad U_n = \sum_{1 \leq i, j \leq n} ij$$

1. Construire une procédure qui, étant donné un entier $n \geq 2$, calcule S_n , T_n et U_n .
2. Calculer ces sommes "à la main" et vérifier avec les résultats obtenus avec Scilab.

2 Sommes doubles à indices dépendants

Considérons maintenant des réels $x_{i,j}$ avec $1 \leq i \leq j \leq n$ rangés dans le tableau carré suivant:

$$\begin{array}{ccccccc} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,j} & \cdots & x_{1,m} & \\ & x_{2,2} & \cdots & x_{2,j} & \cdots & x_{2,m} & \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots & \\ & & & x_{j,j} & \cdots & x_{j,m} & \\ & & & & \ddots & \vdots & \\ & & & & & & x_{n,n} \end{array}$$

On souhaite calculer la somme S de tous ces termes:

- **Sommation suivant les lignes:** On calcule la somme des termes de la première ligne, puis on ajoute les termes de la deuxième ligne, ... et enfin la somme des termes de la n -ième ligne:

$$S = \sum_{j=1}^n x_{1,j} + \sum_{j=2}^n x_{2,j} + \dots + \sum_{j=i}^n x_{i,j} + \dots + \sum_{j=n}^n x_{n,j} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i}^n x_{i,j} \right)$$

- **Sommation suivant les colonnes:** On calcule la somme des termes de la première colonne, puis on ajoute les termes de la deuxième colonne, ... et enfin la somme des termes de la n -ième colonne:

$$S = \sum_{i=1}^1 x_{i,1} + \sum_{i=1}^2 x_{i,2} + \dots + \sum_{i=1}^j x_{i,j} + \dots + \sum_{i=1}^n x_{i,n} = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^j x_{i,j} \right)$$

On obtient évidemment la même somme avec ces deux méthodes d'où la formule d'interversion suivante:

Propriété 2 (Interversion de sommes à indices dépendants)

Considérons des réels $x_{i,j}$ avec $1 \leq i \leq j \leq n$. Alors la somme S de tous ces termes est:

$$S = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i}^n x_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^j x_{i,j} \right)$$

On notera S sous la forme plus concise $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} x_{i,j}$.

Exemple. Avec $n = 4$, on a:

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq j \leq 4} x_{i,j} &= \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{j=i}^4 x_{i,j} \right) = x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} + x_{2,2} + x_{2,3} + x_{2,4} + x_{3,3} + x_{3,4} + x_{4,4} \\ &= \sum_{j=1}^4 \left(\sum_{i=1}^j x_{i,j} \right) = x_{1,1} + x_{1,2} + x_{2,2} + x_{1,3} + x_{2,3} + x_{3,3} + x_{1,4} + x_{2,4} + x_{3,4} + x_{4,4}. \end{aligned}$$

Exercice 4 1. Écrire sans les symboles \sum l'expression: $\sum_{1 \leq i \leq j \leq 5} (j - i)$.

2. Écrire avec le symbole \sum l'expression: $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{2}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \frac{3}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{4}$.

► Pour intervertir les symboles \sum dans la somme $\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i}^n x_{i,j} \right)$, on peut procéder ainsi:

- Le système d'indices qui décrit la somme est $1 \leq i \leq n$ et $i \leq j \leq n$.
- On synthétise ces conditions: $1 \leq i \leq j \leq n$.
- On les réorganise en "commençant" par j : $1 \leq j \leq n$ et $1 \leq i \leq j$.

On en déduit que la somme double s'écrit: $\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^j x_{i,j} \right)$.

Si on ne somme pas les termes diagonaux du tableau précédent, on obtient la formule d'interversion suivante:

Propriété 3 (Interversion de sommes à indices dépendants)

Considérons des réels $x_{i,j}$ avec $1 \leq i < j \leq n$. Alors la somme S de tous ces termes est:

$$S = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=i+1}^n x_{i,j} \right) = \sum_{j=2}^n \left(\sum_{i=1}^{j-1} x_{i,j} \right).$$

On notera S sous la forme plus concise $\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_{i,j}$.

Exemple. Avec $n = 4$, on a:

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq 4} x_{i,j} &= \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=i+1}^4 x_{i,j} \right) = x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} + x_{2,3} + x_{2,4} + x_{3,4} \\ &= \sum_{j=2}^4 \left(\sum_{i=1}^{j-1} x_{i,j} \right) = x_{1,2} + x_{1,3} + x_{2,3} + x_{1,4} + x_{2,4} + x_{3,4}. \end{aligned}$$

Exercice 5 1. Écrire sans les symboles \sum l'expression: $\sum_{1 \leq i < j \leq 5} (j - i)$.

2. Écrire avec le symbole σ l'expression: $\frac{2}{1} + \frac{3}{1} + \frac{4}{1} + \frac{5}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{5}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{3} + \frac{5}{4}$.

► Pour intervertir les symboles \sum dans la somme $\sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=i+1}^n x_{i,j} \right)$, on peut procéder ainsi:

- Le système d'indices qui décrit la somme est $1 \leq i \leq n - 1$ et $i + 1 \leq j \leq n$.
- On synthétise ces conditions: $1 \leq i < j \leq n$.

- On les réorganise en "commençant" par j : $2 \leq j \leq n$ et $1 \leq i \leq j - 1$.

On en déduit que la somme double s'écrit: $\sum_{j=2}^n \left(\sum_{i=1}^{j-1} x_{i,j} \right)$.

Exercice 6 On considère la procédure suivante:

```
n=input('Donner une valeur de n: ')
S=0
for i=1:n do
    for j=i:n do
        S=S+i/j
    end
end
disp(S)
```

1. Entrer dans l'éditeur de Scilab cette procédure. Tester pour différentes valeurs de n . A quoi correspond la valeur de S donnée en sortie?
2. Calculer S "à la main" et vérifier le résultat grâce aux valeurs obtenues avec Scilab.

Exercice 7 On considère les deux sommes suivantes, où n est un entier ≥ 2 :

$$S_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} 1, \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} i.$$

1. Construire une procédure qui, étant donné un entier $n \geq 2$, calcule S_n et T_n .
2. Calculer ces sommes "à la main" et vérifier avec les résultats obtenus avec Scilab.

Exercice 8 Calculer les sommes doubles suivantes:

$$\begin{array}{lll} (1) \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{1}{j} & (2) \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij & (3) \sum_{1 \leq i < j \leq n} (i+j) \\ (4) \sum_{0 \leq i, j \leq n} 2^{i+j} & (5) \sum_{1 \leq i, j \leq n} |i-j| & (6) \sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j) \end{array}$$