Méthode de la dichotomie

Exercice 1. On va utiliser la recherche d'une valeur approchée d'une solution d'une équation par la méthode de dichotomie :

On souhaite par exemple trouver une valeur approchée de la solution de l'équation $xe^x - 1 = 0$.

1. Justifier que l'équation précédente admet une unique solution sur $[0; 1]$.
2. Expliquer pourquoi la solution est dans $]\frac{1}{2}; 1[$.

On continue la recherche en procédant comme suit :

- ⋆ On "coupe l'intervalle qui contient la solution en deux" en prenant $c \in]a; b[$, $c = \dfrac{a+b}{2}$.
- ⋆ Si c est la solution. La recherche est terminée
- ⋆ Sinon on continue la recherche avec l'intervalle $]a, c[$ ou $]c; b[$ qui contient la solution de la même en procédant de la même manière.

La longueur de l'intervalle est divisé par deux à chaque étape, il diminue donc au fur et à mesure, ce qui nous permet d'obtenir un encadrement de la solution avec la précision voulue.

Compléter le script de la fonction dichotomie pour qu'il permette de trouver une valeur approchée de la solution avec une précision de ε

```python
import numpy as np
def fonction(x):
    y=x*np.exp(x)-1
    return y
def dichotomie(a, b, epsilon):
    m = (a + b)/2.
    while abs(a - b) > epsilon:
        if fonction(m) == 0.:
            return ...
        elif fonction(a)*fonction(m) > 0:
            a = ...
        else:
            b = ...
        m = (a + b)/2
    return ...
```

Exercice 2. On considère l'équation $x\ln(x) = 1$

1. Montrer que cette équation admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Préciser un intervalle fermé fini contenant la solution.
3. Utiliser la fonction **dichotomie** pour déterminer une valeur approchée au millième de la solution

Le choix de l'intervalle $[a, b]$ est important pour commencer la recherche. Si la solution de l'équation ne s'y trouve pas la recherche faite par le script est vaine. Il est important de travailler avec des fonctions continues pour assurer de l'existence de la solution.

Exercice 3. Compléter le script de la fonction dichotomie pour qu'il permette de vérifier que l'intervalle $[a, b]$ est bien choisi.

Méthode par balayage :

On considère l'équation précédente $xe^x - 1 = 0$ et on choisit un intervalle fermé qu'on sait contenir la solution, ici $[0, 1]$. On parcourt l'intervalle avec un pas ε choisi et détermine dans quel intervalle de longueur ε se trouve la solution.
On peut utiliser :

```
import numpy as np
def fonction(x):
    return x*np.exp(x)-1
def balayage(epsilon):
        x=0
        while fonction(x)*fonction(x+epsilon)>0:
            x=x+epsilon
        return (x,x+epsilon)
```

Exercice 4. Déterminer un valeur approchée de la solution de l'équation $xe^x - 1 = 0$ à 0,0001 près

Exercice 5. Déterminer une valeur approchée à 0,0001 près de l'équation $x\ln(x) = 1$.

Comme pour la méthode par dichotomie, il est important que la fonction soit continue.

Utilisation d'une suite récurrente :

Le but est de résoudre l'équation sur $\mathbb{R}_-$

$$(\text{E}) : e^x = 3 + 2x.$$

1. Démontrer que l'équation (E) admet une unique solution α sur $\mathbb{R}_-$.
2. Vérifier que $-2 < \alpha < -1$
3. On considère la suite récurrente définie par $u_0 = 0$, et, $\forall n \in \mathbb{N}$, et $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f : x \mapsto \dfrac{e^x - 3}{2}$
   (a) Écrire un script permettant de calculer les termes de la suite.
   (b) Démontrer que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \leqslant 0$.
   (c) Démontrer avec l'inégalité des accroissements finis que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$
   et par un raisonnement par récurrence que
   $$|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}|u_0 - \alpha|$$
   puis en déduire que cette suite converge vers la solution α de l'équation (E)
4. On souhaite construire un script approchant α par les termes de la suite (u_n) à 0,001 près , ie à partir d'un certain rang n, $|u_n - \alpha| \leqslant 0,001$.

   (a) Vérifier qu'il suffit que $\dfrac{1}{2^{n-1}} \leqslant 0,001$, puis en déduire un script pour qu'il renvoie une valeur approchée de α à 10^{-3} près.
   (b) Reprendre le script précédent en remplaçant 0,001 par une précision quelconque ε donnée par l'utilisateur.
   (c) Tester la valeur approchée dans l'équation du départ.