TP2

Les boucles `for...do...end`

En algorithmique, on peut être amené à répéter un bloc d'instructions un nombre déterminé de fois. Pour cela, on utilise une boucle `for`. La syntaxe est la suivante:

```
> for var=ini:fin do
    instructions
  end
```

La variable *var* parcourt dans l'ordre les entiers de *ini* à *fin* et, à chaque étape, les *instructions* sont effectuées. Le `for` et le `end` sont indispensables, le `do` est facultatif.

Exercice 1 1. Entrer dans l'éditeur de Scilab les instructions suivantes:

```
n=input('Donner une valeur de n: ')
S=0
for k=1:n do
    S=S+k
end
disp(S)
```

Tester pour différents entiers naturels n. A quoi correspond la valeur de S à la fin de la boucle? Vérifier à l'aide d'une formule sur les sommes usuelles.

2. Modifier les instructions précédentes pour calculer les sommes suivantes:

$$\sum_{k=1}^{5} k^2, \qquad \sum_{k=1}^{10} k^2, \qquad \sum_{k=1}^{20} k^2, \qquad \sum_{k=1}^{5} k^3, \qquad \sum_{k=1}^{10} k^3$$

Vérifier les résultats à l'aide des formules sur les sommes usuelles.

Exercice 2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la somme suivante:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (k^2 + 4k + 4).$$

1. Écrire une suite d'instructions qui, étant donné un entier naturel n, calcule S_n.
2. En utilisant la linéarité de la somme, calculer S_n.
3. En utilisant une identité remarquable et un changement d'indice, retrouver le résultat de la question précédente.

Exercice 3 1. Écrire une suite d'instructions qui, étant donné un entier naturel non nul n, calcule:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}, \qquad T_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}.$$

2. Tester pour différentes valeurs de n et faire une conjecture sur S_n et T_n.
3. Montrer que: $\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{k^2} - \dfrac{1}{(k+1)^2} = \dfrac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$.
4. Prouver la conjecture.

Exercice 4 1. Écrire une suite d'instructions qui, étant donné un entier naturel n, calcule $n!$.

2. Écrire une suite d'instructions pour calculer les produits suivants:

$$\prod_{k=1}^{5} \frac{2^{2k}}{3^k}, \qquad \prod_{k=1}^{10} \frac{2^{2k}}{3^k}, \qquad \prod_{k=2}^{5} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \qquad \prod_{k=2}^{10} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

Vérifier les résultats en calculant "à la main" ces produits.